Estimasi dan Statistik Uji pada Model Probit Biner Bivariat

Estimation and Statistical Test in Bivariate Binary Probit Model

Vita Ratnasari[1], Purhadi[2], Ismaini[2] & Suhartono[2]
[1]Mahasiswa S-3 Statistika FMIPA ITS, Surabaya
[2]Jurusan Statistika FMIPA ITS, Surabaya

ABSTRACT

One of the models that can be used to analyze two binary response variables data is bivariate binary probit model. This paper tried to estimate the parameters of bivariate binary probit model using Maximum Likelihood Estimation method, whereas to get the statistical test using Maximum Likelihood Ratio Test method.

Keywords : Bivariate binary probit model, maximum likelihood estimation, maximum likelihood ratio test

PENDAHULUAN

Jenis skala pengukuran data statistik dibedakan menjadi dua yaitu *metric* (kuantitatif) dan *nonmetric* (kualitatif atau kategorikal). Variabel respon pada pembentukan regresi klasik, harus bersifat kuantitatif (Sharma 1996 & Hair *et al.* 2006). Pada kenyataannya, banyak di-jumpai variabel respon bersifat katego-rikal. Sebagai contoh; lulus atau tidak lu-lus, sukses atau gagal, dan lain sebagainya. Jika variabel respon bersifat kategorikal dipaksakan dengan menggunakan model regresi klasik, maka akan terjadi pelanggaran asumsi. Pelanggaran tersebut antara lain ε_i tidak berdistribusi Normal dan varians ε_i tidak konstan. Selain itu nilai $E(Y_i|X_i)$ tidak selalu berada antara 0 dan 1 (Kutner *et al.* 2005). Model yang tepat dalam mengatasi per-masalahan ini adalah model logit atau probit.

Menurut Gujarati (2003), untuk me-nerangkan perilaku variabel respon kate-gorikal adalah dengan menggunakan *Cu-mulative Distribution Function* (CDF). Model logit menggunakan logistik CDF, sedangkan model probit menggunakan normal CDF. Penerapan model probit banyak dilakukan diberbagai bidang. Penerapan model probit pada bidang biostatistik dilakukan oleh Bliss (1934) serta Snapinn & Small (1986). Bidang entomologi oleh Aitchison & Silvey (1957), sedangkan di bidang kesehatan oleh Song dan Lee (2005). Di bidang sosial politik oleh McKelvey & Zavoina (1975), Jackman (2000), serta Boes & Winkelmann (2005). Model probit yang diterapkan umumnya adalah model probit dengan satu variabel respon saja. Padahal, kenyataannya banyak penelitian yang membutuhkan jumlah variabel respon lebih dari satu. Oleh karena itu, pada paper ini akan ditentukan model probit dengan melibatkan dua variabel respon. Sebelum membentuk model, terlebih dahulu me-nentukan estimasi parameter dan statistik uji model probit. Metode estimasi dan statistik uji yang digunakan adalah metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan *Maximum Likelihood Ratio Test* (MLRT).

Model probit

Misalkan variabel y^* adalah variabel respon yang berdistribusi Normal, dapat ditulis: $y^* \sim N(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x},1)$. Fungsi densitas peluang dari variabel respon y^* adalah sebagai berikut.

$$f\left(y^*\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y^*-\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}\right)^2\right\}$$

dimana variabel $\mathbf{x}=\begin{bmatrix}1 & X_1 & \cdots & X_p\end{bmatrix}^T$ yang berukuran $(p+1)\times 1$ dan parameter koefisien, $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_p\end{bmatrix}^T$ yang berukuran $(p+1)\times 1$.

Variabel respon dikategorikan seba-nyak dua kategori dengan batasan (*threshold*) tertentu, misal:

jika $y^* \le \gamma$, maka $Y=0$

$y^* > \gamma$, maka $Y=1$

Dengan demikian terbentuklah model probit biner univariat. Model probit biner univariat dijelaskan dalam nilai peluang pada persamaan (1). Peluang untuk kategori $Y=1$, adalah

$$P(Y=1)=\Phi(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x}) . \quad (1)$$

Peluang untuk kategori $Y=0$ adalah $P(Y=0)=1-\Phi(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x})$. Dimana $\Phi(\boldsymbol{\beta}^T\mathbf{x})$ adalah fungsi distribusi kumulatif normal standart.

Misal (y_1^*, y_2^*) adalah variabel respon yang berdistribusi bivariat Normal, yang dapat ditulis $(y_1^*, y_2^*) \sim N(\boldsymbol{\mu},\Sigma)$. Dengan $\boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^T\mathbf{x}\\ \boldsymbol{\beta}_2^T\mathbf{x}\end{bmatrix}$ dan $\Sigma=\begin{bmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{bmatrix}$. Fungsi densitas normal bivariat (y_1^*, y_2^*) adalah:

$$f(y_1^*,y_2^*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}y_1^*-\boldsymbol{\beta}_1^T\mathbf{x}\\ y_2^*-\boldsymbol{\beta}_2^T\mathbf{x}\end{bmatrix}^T\Sigma^{-1}\begin{bmatrix}y_1^*-\boldsymbol{\beta}_1^T\mathbf{x}\\ y_2^*-\boldsymbol{\beta}_2^T\mathbf{x}\end{bmatrix}\right\}$$

Peluang normal bivariat (y_1^*, y_2^*), dengan batas z_1 dan z_2 adalah sebagai berikut.

$$P(y_1^*<z_1, y_2^*<z_2)=\int_{-\infty}^{z_2}\int_{-\infty}^{z_1}\phi(z_1,z_2,\rho)\,dz_1\,dz_2 .$$

dimana $z_1=\gamma-\boldsymbol{\beta}_1^T\mathbf{x}$ dan $z_2=\delta-\boldsymbol{\beta}_2^T\mathbf{x}$. Sehingga fungsi densitas normal bivariat (z_1,z_2) adalah sebagai berikut:

$$\phi(z_1,z_2,\rho)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(Z_1^2-2\rho Z_1Z_2+Z_2^2\right)\right\}$$

$\boldsymbol{\beta}_1^T=\begin{bmatrix}\beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1p}\end{bmatrix}$ dan

$\boldsymbol{\beta}_2^T=\begin{bmatrix}\beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2p}\end{bmatrix}$

$\mathbf{x}^T=\begin{bmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_p\end{bmatrix}$

Variabel respon yang berdistribusi bivariat normal, dikategorikan dengan batasan tertentu . jika $y_1^* \le \gamma$ dan $y_2^* \le \delta$ maka $Y=Y_{00}$

$y_1^* \le \gamma$ dan $y_2^* > \delta$ maka $Y=Y_{01}$

$y_1^* > \gamma$ dan $y_2^* \le \delta$ maka $Y=Y_{10}$

$y_1^* > \gamma$ dan $y_2^* > \delta$ maka $Y=Y_{11}$

Pengkategorian distribusi bivariat normal secara dua dimensi, dapat dijelaskan pada Tabel 1. Tabel kontingensi frekuensi dan probabilitas dua dimensi (2×2) secara lengkap terdapat pada Tabel 1. P_{11} merupakan peluang terjadinya Y_{11}.

Tabel 1. Tabel Kontingensi Frekuensi dan Probabilitas (2×2).

Y_1 \ Y_2	$Y_2=0$	$Y_2=1$	Total
$Y_1=0$	$Y_{00};P_{00}$	$Y_{01};P_{01}$	$P_{0+}=1-P_1$
$Y_1=1$	$Y_{10};P_{10}$	$Y_{11};P_{11}$	$P_{1+}=P_1$
Total	$P_{+0}=1-P_2$	$P_{+1}=P_2$	1

Dengan demikian kejadian yang terjadi di Tabel 1 adalah kejadian yang berdistribusi multinomial, yaitu:

$$f(y_{11},y_{10},y_{01},P_{11},P_{10},P_{01})=$$

$$P_{11}^{y_{11}}P_{10}^{y_{10}}P_{01}^{y_{01}}(1-P_{11}-P_{10}-P_{01})^{1-y_{11}-y_{10}-y_{01}}$$

Model probit biner bivariat, dijelaskan dengan nilai probabilitas di setiap kemungkinan kejadian yang terjadi. Probabilitas tersebut terdapat pada persaman (2), (3), (4) dan (5).

$$P_{11}=1-\Phi(z_1)-\Phi(z_2)+\Phi(z_1,z_2), \quad (2)$$

$$P_{10}=\Phi(z_2)-\Phi(z_1,z_2), \quad (3)$$

$$P_{01}=\Phi(z_1)-\Phi(z_1,z_2) \text{ dan} \quad (4)$$

$$P_{00}=\Phi(z_1,z_2) \quad (5)$$

Nilai marginal P_1 pada Tabel 1 dapat ditulis:

$$P_1=1-\Phi(z_1) \quad (6)$$

Dengan cara yang sama, nilai marjinal P_2 adalah sebagai berikut.

$$P_2=1-\Phi(z_2) \quad (7)$$

HASIL DAN PEMBAHASAN

Sesuai dengan tujuan penulisan, berikut ini dibahas tentang estimasi parameter dan statistik uji model probit biner bivariat.

Estimasi parameter

Pada Tabel 1 menunjukkan bahwa kejadian pada setiap responden akan berdistribusi Multinomial yaitu

$$(Y_{11},Y_{10},Y_{01})\sim M(1;P_{11},P_{10},P_{01}) .$$

Nilai Y_{00} dan peluang P_{00} secara berturut adalah $Y_{00}=1-Y_{11}-Y_{10}-Y_{01}$ dan $P_{00}=1-P_{11}-P_{10}-P_{01}$, dimana nilai y_{11},y_{10},y_{01} dan y_{00} adalah 0 atau 1. Menurut

Gujarati (2003) dan Greene (2008) parameter yang terdapat pada model probit diduga dengan mengguna-kan metode MLE. Tahapan awal untuk mendapatkan estimasi parameter dengan metode MLE adalah dengan mengambil n sampel random, $\left(Y_{11i}, Y_{10i}, Y_{01i}, Y_{00i}, X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{pi}\right)$, dimana $i = 1, 2, ..., n$. Fungsi likelihoodnya dapat ditulis sebagai berikut.

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} P_{11i}^{y_{11i}} P_{10i}^{y_{10i}} P_{01i}^{y_{01i}} (1 - P_{11i} - P_{10i} - P_{01i})^{1-y_{11i}-y_{10i}-y_{01i}}$$

Dan fungsi ln likelihoodnya terdapat pada persamaan (8).

$$\begin{aligned}\ln L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \Big(& y_{11i} \ln(P_{2i} - P_{01i}) + \\ & + y_{10i} \ln(P_{1i} - P_{2i} + P_{01i}) + y_{01i} \ln P_{01i} + \\ & + (1 - y_{11i} - y_{10i} - y_{01i}) \ln(1 - P_{1i} - P_{01i}) \Big)\end{aligned} \quad (8)$$

Nilai peluang pada persamaan (8) me-ngandung parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, dimana komponen yang terkandung pada parameter $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$.

Dengan pemisalan $a = \left(\dfrac{1}{P_{01i}}\right)$,

$b = \left(\dfrac{1}{P_{2i} - P_{01i}}\right)$, $c = \left(\dfrac{1}{P_{1i} - P_{2i} + P_{01i}}\right)$ dan $d = \left(\dfrac{1}{1 - P_{1i} - P_{01i}}\right)$,

maka langkah berikutnya adalah menentukan estimasi $\boldsymbol{\beta}_1$ dan $\boldsymbol{\beta}_2$, dengan cara menurunkan persamaan (8) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ dan $\boldsymbol{\beta}_2$. Turunan $\ln L(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ adalah:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = \sum_{i=1}^{n} \Big[& (a y_{01i} - b y_{11i} + c y_{10i} - d y_{00i}) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right) + \\ & + (c y_{10i} - d y_{00i}) \left(\frac{\partial P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T}\right) \Big]\end{aligned} \quad (9)$$

dimana turunan peluang P_{1i} dan P_{01i} terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = (\mathbf{x})\,\phi(z_1) \text{ dan} \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = (-\mathbf{x})\,\phi(z_1) + (\mathbf{x})\phi(z_1, z_2) \quad (11)$$

Sedangkan turunan $\ln(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ sebagaimana persamaan (12).

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \sum_{i=1}^{n} \Big[& (b y_{11i} - c y_{10i}) \left(\frac{\partial P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right) \\ & + (a y_{01i} - b y_{11i} + c y_{10i} - d y_{00i}) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T}\right) \Big]\end{aligned} \quad (12)$$

Dengan turunan peluang P_{2i} dan P_{01i} terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$ adalah sebagai berikut.

$$\frac{\partial P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = (\mathbf{x})\phi(z_2) \text{ dan} \quad (13)$$

$$\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = (\mathbf{x})\phi(z_1, z_2) \quad (14)$$

Dari persamaan (9) dan (12) diperoleh hasil taksiran yang tidak *close form*, maka salah satu pendekatan numerik yang dapat digunakan adalah metode *Newton-Raphson*. Melalui proses iterasi *Newton-Raphson* dapat diperoleh penaksir maksimum *likelihood* bagi $\boldsymbol{\beta}$, dima-na $\boldsymbol{\beta}^{(m)}$ adalah penaksiran parameter pada iterasi ke *m*. Selain membentuk vektor $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$ yang dibutuhkan untuk proses iterasi tersebut, perlu didapatkan matrik Hessian, $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$. Vektor gradien atau vektor $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$ merupakan turunan pertama dari fungsi ln *likelihood* terhadap parameternya. Elemen-elemen matriks $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ merupakan turunan kedua terhadap parameternya. Komponen vektor $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$ yang berukuran $[2(p+1) \times 1]$ adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \\ \dfrac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{pmatrix}_{[2(p+1) \times 1]}$$

Komponen vektor $\mathbf{g}(\boldsymbol{\beta})$ terdapat pada persamaan (9) dan (12).

Matrik simetris Hessian $\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta})$ yang berukuran $[2(p+1) \times 2(p+1)]$ adalah sebagai berikut.

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \\ \dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} & \dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \end{bmatrix}_{[2(p+1)\times 2(p+1)]}$$

Secara rinci, komponen-komponen matriks Hessian terdapat pada persamaan (15), (18), dan (20). Persamaan (15) diperoleh dengan menurunkan persamaan (9) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = & \sum_{i=1}^{n} \Big[-\left(a^2 y_{01i} + b^2 y_{11i} + c^2 y_{10i} + d^2 y_{00i} \right) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right)^2 + \\ & -2\left(c^2 y_{10i} + d^2 y_{00i} \right) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right)\left(\frac{\partial P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ & -2\left(c^2 y_{10i} + d^2 y_{00i} \right) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right)\left(\frac{\partial P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ & +\left(a y_{01i} - b y_{11i} - d y_{00i} \right) \left(\frac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ & +\left(2c y_{10i} + d y_{00i} \right) \left(\frac{\partial^2 P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \Big] \end{aligned} \quad (15)$$

Dimana $\dfrac{\partial^2 P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$ diperoleh dengan menurunkan persamaan (10) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$.

$$\frac{\partial^2 P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = (\mathbf{x}\mathbf{x}^T)(z_1)\exp\left(\frac{1}{2}(z_1) \right) \quad (16)$$

Begitu pula $\dfrac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T}$ diperoleh dengan menurunkan persamaan (11) terhadap $\boldsymbol{\beta}_1$.

$$\frac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_1^T} = (\mathbf{x}\mathbf{x}^T)(z_1)\exp\left(\frac{1}{2}(z_1) \right) - \frac{(\mathbf{x})}{(1-\rho^2)}\left(z_1 + \rho(z_2) \right)\exp(\Delta) \quad (17)$$

dengan

$$\Delta = \left(\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\rho^2)}\left(z_1^2 - 2\rho(z_1)(z_2) + z_1^2 \right) \right)$$

Persamaan (18) didapatkan dari penurunan persamaan (9) terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = & \sum_{i=1}^{n} \Big[(b^2 y_{11i} + c^2 y_{10i}) \left(\frac{\partial P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)\left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ & -(a^2 y_{01i} + b^2 y_{11i} + c^2 y_{10i} - d y_{00i}) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)\left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ & + c^2 y_{10i} \left(\frac{\partial P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)\left(\frac{\partial P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ & -(c^2 y_{10i} - d^2 y_{00i}) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)\left(\frac{\partial P_{1i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1^T} \right) \\ & +(a y_{01i} - b y_{11i} + c y_{10i} - d y_{00i}) \left(\frac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \Big] \end{aligned} \quad (18)$$

Dimana $\dfrac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$ didapatkan dari turunan persamaan (11) terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$.

$$\frac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_1 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = -\frac{(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)}{(1-\rho^2)}\left(z_1 - \rho(z_2) \right)\exp(\Delta) \quad (19)$$

Sedangkan $\dfrac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$ diperoleh dari turunan kedua $\ln(\boldsymbol{\beta})$ terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = & \sum_{i=1}^{n} \Big[2(b^2 y_{11i} + c^2 y_{10i}) \left(\frac{\partial P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)\left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \\ & -\left(a^2 y_{01i} + b^2 y_{11i} + c^2 y_{10i} + d^2 y_{00i} \right) \left(\frac{\partial P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)^2 + \\ & -(b^2 y_{11i} + c^2 y_{10i}) \left(\frac{\partial P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right)^2 + \\ & +\left(a y_{01i} - b y_{11i} + c y_{10i} - d y_{00i} \right) \left(\frac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) + \\ & +(b y_{11i} + c y_{10i}) \left(\frac{\partial^2 P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} \right) \Big] \end{aligned} \quad (20)$$

$\dfrac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$ didapatkan dengan menurunkan persamaan (14) terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$, yaitu:

$$\frac{\partial^2 P_{01i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = \frac{(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)}{(1-\rho^2)}\left(-z_2 + \rho(z_1) \right)\exp(\Delta) \quad (21)$$

Dan $\dfrac{\partial^2 P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2 \partial \boldsymbol{\beta}_2^T}$ didapatkan dengan menurunkan persamaan (13) terhadap $\boldsymbol{\beta}_2$, yaitu:

$$\frac{\partial^2 P_{2i}}{\partial \boldsymbol{\beta}_2\, \partial \boldsymbol{\beta}_2^T} = (\mathbf{x}\mathbf{x}^T)(z_2)\exp\left(-\frac{1}{2}(z_2)\right) \tag{22}$$

Pengujian signifikansi parameter

Pengujian kelayakan model dilakukan pengujian parameter. Hal ini bertujuan untuk mengetahui apakah variabel prediktor yang terdapat dalam model berpengaruh nyata atau tidak. Pengujian parameter model dilakukan baik secara *overall* (serentak) maupun parsial. Metode yang digunakan untuk menda-patkan statistik uji adalah MLRT.

Hipotesis serentak adalah suatu hipotesa yang menguji apakah variabel $x_1, x_2, \ldots, x_p$ mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap variabel respon y_1 dan y_2. Hipotesa tersebut adalah:

$H_0 : \beta_{11} = \beta_{12} = \ldots = \beta_{1p} = \beta_{21} = \beta_{22} = \ldots = \beta_{2p} = 0$

H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_{rs} \neq 0$

dengan $r = 1, 2$ dan $s = 1, 2, \ldots, p$

Himpunan parameter dibawah populasi (Ω) adalah:

$\Omega = \{\beta_{10}, \beta_{11}, \ldots, \beta_{1p}, \beta_{20}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{2p}\}$

Sedangkan himpunan parameter dibawah H0 (ω) adalah:

$\omega = \{\beta_{10}, \beta_{20}\}$.

Statistik uji didapatkan dengan merasiokan $L(\hat{\omega})$ dan $L(\hat{\Omega})$, $\Lambda = \dfrac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}$. Tolak H0 jika $\Lambda = \dfrac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} < \lambda_0$, dimana $0 < \lambda_0 < 1$.

Sehingga didapatkan $G^2 = -2\ln\Lambda$, dimana menurut Agresti (2002), G^2 mendekati distribusi χ^2.

$$G^2 = -2\ln\Lambda = -2\ln\left(\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})}\right) = 2\ln L(\hat{\Omega}) - 2\ln L(\hat{\omega})$$

Secara rinci $L(\hat{\Omega})$ adalah:

$$\begin{aligned} L(\hat{\Omega}) = {} & \left[1 - \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T\mathbf{x}) - \Phi(\delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T\mathbf{x}) + \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T\mathbf{x})\right]^{y_{11}} \times \\ & \times \left[\Phi(\delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T\mathbf{x}) - \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T\mathbf{x})\right]^{y_{10}} \times \\ & \times \left[\Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T\mathbf{x}) - \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T\mathbf{x})\right]^{y_{01}} \times \\ & \times \left[\Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^T\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^T\mathbf{x})\right]^{y_{00}} \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan nilai $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1$ dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2$ dengan menggunakan persamaan (9) dan (12).

Sedangkan $L(\hat{\omega})$ adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} L(\hat{\omega}) = {} & \left[1 - \Phi(\gamma - \hat{\beta}_{10}) - \Phi(\delta - \hat{\beta}_{20}) + \Phi(\gamma - \hat{\beta}_{10}, \delta - \hat{\beta}_{20})\right]^{y_{11}} \times \\ & \times \left[\Phi(\delta - \hat{\beta}_{20}) - \Phi(\gamma - \hat{\beta}_{10}, \delta - \hat{\beta}_{20})\right]^{y_{10}} \times \\ & \times \left[\Phi(\gamma - \hat{\beta}_{10}) - \Phi(\gamma - \hat{\beta}_{10}, \delta - \hat{\beta}_{20})\right]^{y_{01}} \times \\ & \times \left[\Phi(\gamma - \hat{\beta}_{10}, \delta - \hat{\beta}_{20})\right]^{y_{00}} \end{aligned}$$

Nilai $\hat{\beta}_{10}$ dan $\hat{\beta}_{20}$ diperoleh dengan menggunakan persamaan (23) dan (24). dimana turunan ln likelihood terhadap β_{10} adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_{10}} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[& (a y_{01i} - b y_{11i} + c y_{10i} - d y_{00i})\left(\frac{\partial P_{01i}^*}{\partial \beta_{10}}\right) \\ & + (c y_{10i} - d y_{00i})\left(\frac{\partial P_{1i}^*}{\partial \beta_{10}}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{23}$$

Nilai turunan peluang P_{1i}^* dan P_{01i}^* terhadap β_{10} adalah:

$$\frac{\partial P_{1i}^*}{\partial \beta_{10}} = \phi(z_1^*) \text{ dan } \frac{\partial P_{01i}^*}{\partial \beta_{10}} = -\phi(z_1^*) + \phi(z_1^*, z_2^*)$$

dimana nilai $z_1^* = \gamma - \beta_{10}$ dan $z_2^* = \delta - \beta_{20}$.

Sedangkan turunan pertama $\ln(\boldsymbol{\beta})$ terhadap β_{20} adalah:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_{20}} = \sum_{i=1}^{n} \Bigg[& (b y_{11i} - c y_{10i})\left(\frac{\partial P_{2i}^*}{\partial \beta_{20}}\right) \\ & + (a y_{01i} - b y_{11i} + c y_{10i} - d y_{00i})\left(\frac{\partial P_{01i}^*}{\partial \beta_{20}}\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{24}$$

dengan turunan peluang P_{2i}^* dan P_{01i}^* terhadap β_{20} adalah:

$$\frac{\partial P_{2i}^*}{\partial \beta_{20}} = \phi(z_2^*) \text{ dan } \frac{\partial P_{01i}^*}{\partial \beta_{20}} = \phi(z_1^*, z_2^*)$$

Keputusan untuk menolak H0 jika $G^2 > \chi^2_{\alpha,v}$, dimana *v* adalah banyaknya parameter model dibawah populasi dikurangi banyaknya parameter model di bawah H0. Kemudian nilai $\chi^2_{v,\alpha}$ dapat diperoleh pada tabel *Chi-Square*.

Setelah melakukan pengujian secara serentak, langkah selanjutnya adalah pengujian secara parsial. Pada pengujian parsial, ingin diketahui kontribusi setiap variabel prediktor. Pengujian hipotesis secara parsial pada model probit biner bivariat adalah:

H_0 : $\beta_{rs} = 0$

H_1 : $\beta_{rs} \neq 0$ dengan $r = 1,2$ dan $s = 0,1,2,...,p$

Himpunan parameter jika H_0 benar (ω) adalah:

$$\omega = \left\{ \beta_{r^* s^*}, r^* = 1,2; s^* = 0,1,...,p; r^* \neq r, s^* \neq s \right\}$$

dimana:

$$L(\hat{\omega}) = \prod \left[1 - \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{*T}\mathbf{x}) - \Phi(\delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^{*T}\mathbf{x}) + \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{*T}\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^{*T}\mathbf{x})\right]^{y_{11}}$$
$$\times \left[\Phi(\delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^{*T}\mathbf{x}) - \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{*T}\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^{*T}\mathbf{x})\right]^{y_{10}}$$
$$\times \left[\Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{*T}\mathbf{x}) - \Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{*T}\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^{*T}\mathbf{x})\right]^{y_{01}} \times$$
$$\times \left[\Phi(\gamma - \hat{\boldsymbol{\beta}}_1^{*T}\mathbf{x}, \delta - \hat{\boldsymbol{\beta}}_2^{*T}\mathbf{x})\right]^{y_{00}}$$

dengan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* = \{\beta_{10}, \beta_{11}, ..., \beta_{1(s-1)}, \beta_{1(s+1)}, ..., \beta_{1p}\}$

dan $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2^* = \{\beta_{20}, \beta_{21}, ..., \beta_{2p}\}$ atau

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_1^* = \{\beta_{10}, \beta_{11}, ..., \beta_{1p}\}$ dan

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_2^* = \{\beta_{20}, \beta_{21}, ..., \beta_{2(s-1)}, \beta_{2(s+1)}, ..., \beta_{2p}\}$

Pembentukan statistik uji parsial dilakukan dengan menggunakan metode MLRT seperti pada uji serentak, se-hingga didapatkan statistik uji t, yaitu $t = \dfrac{\hat{\beta}_{rs}}{SE(\hat{\beta}_{rs})}$. Dengan n besar, maka $t \sim N(0,1)$. Keputusan untuk menolak H_0 jika $|t| > Z_{\alpha/2}$.

KESIMPULAN

Estimasi parameter model probit biner bivariat dapat diperoleh dengan menggunakan MLE. Karena diperoleh hasil yang tidak *close form*, maka dilakukan perhitungan secara numerik, yaitu iterasi Newton-Rapshon. Dengan meng-gunakan metode MLRT, diperoleh statistik uji serentak yaitu statistik uji G^2, sedangkan uji parsial adalah statistik uji t.

DAFTAR PUSTAKA

Agresti A. 2002. *Categorical Data Analysis*, John Wiley & Sons Inc. Hoboken. New Jersey.

Aitchison J & Silvey SD. 1957. The Generalization of Probit Analysis to the Case of Multiple Responses. *Bio-metrika*: **44**(**2**): 131-140.

Bliss CI. 1934. The Method of Probits. *American Association for the Advancement of Science: Science. New Serie:* **79** (2037): 38–39.

Boes S & Winkelmann R. 2005. Ordered Response Models, *Tech-nical Report.* Socioeconomic Institute. University of Zurich.

Greene WH. 2008. *Econometrics Analysis.* Fourth Edition. Prentice Hall. Englewood Cliffs. New Jersey.

Gujarati DN. 2003. *Basic Econome-tric.* Fourth Edition. Mc Graw Hill. New York.

Hair JF, Black WC, Babin BJ, Anderson RE & Tatham RL. 2006. *Multivariate Data Analysis*. Prentice Hall Inc. New Jersey.

Jackman S. 2000. Models for Ordered Outcomes. *Technical Report.* Stan-ford University.

McKelvey RD & Zavoina W. 1975. A Statistical Model for the Analysis of Ordinal Level Dependent Vari-ables. *Journal of Mathematical So-ciology*. **4**:103-120.

Kutner MH, Nachtsheim CJ, Nether J & Li W. 2005. *Applied Linear Statistical Models.* McGraw-Hill Companies. New York

Sharma S. 1996. *Applied Multivariate Techniques.* John Willey & Sons Inc. Canada.

Snapinn SM & Small RD. 1986. Test of Significance Using Regres-sion Models for Ordered Categorical Data. *Biometrics*. **42**:583-592.

Song XY & Lee SY. 2005. A Multivariate Probit Latent Variable Model for Analyzing Dichotomous Responses. *Statistica Sinica.* **15**:645-664.